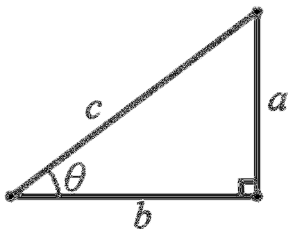
(08) 三角函數

一、基本的三角函數定義與性質

1.



$sin\theta=\frac{a}{c}$，$cos\theta=\frac{b}{c}$，$tan\theta=\frac{a}{b}$

$\because a^2+b^2=c^2$，$c=\sqrt{a^2+b^2}$

$\therefore$ $sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

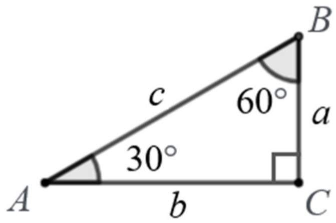
$cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

2. 若 $\theta=0^\circ$，則 $a=0$

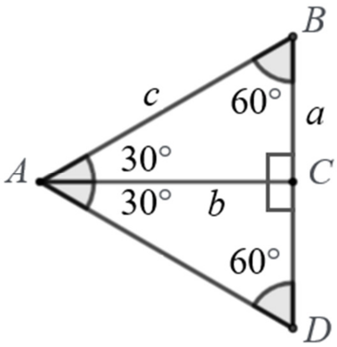
$sin\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{0}{\sqrt{a^2+b^2}}=0$

$cos\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{0+b^2}}=1$

3. 若 θ＝30°，如何得到 *sin*30°、*cos*30°、*tan*30°？



再加上一個相同的三角形



合成的△*ABD*，因為三內角都是 60°，所以△*ABD* 是正三角形

$\therefore a = \frac{1}{2}\overline{BD} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{1}{2}c$，$c=2a$

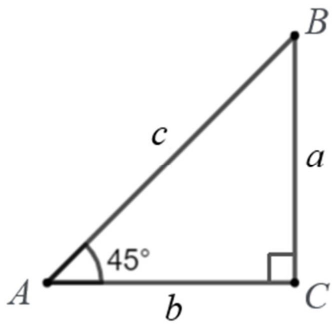
$b^2=c^2-a^2=(2a)^2-a^2=4a^2-a^2=3a^2$， $b = \sqrt{3}a$ (長度不取負值)

$sin30°=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}$

$cos30°=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$tan30°=\frac{a}{b}=\frac{a}{\sqrt{3}a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. 若 θ＝45°，如何得到 $sin45°$、$cos45°$、$tan45°$？



$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，$a=b$

$c^2=a^2+b^2=a^2+a^2=2a^2$

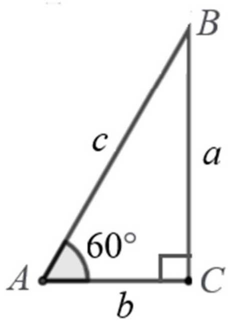
$c=\sqrt{2}a$ (長度不取負值)

$sin45°=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

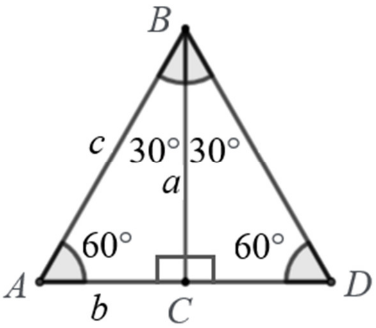
$cos45°=\frac{b}{c}=\frac{a}{\sqrt{2}a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$tan45°=\frac{a}{b}=\frac{a}{a}=1$

5. 若 θ＝60°，如何得到 $sin60°$、$cos60°$、$tan60°$？



再加上一個相同的三角形



合成的△ABD，因為三內角都是 60°，所以△ABD 是正三角形

$c=\overline{AB}=\overline{AD}=2b$，$b=\frac{1}{2}c$

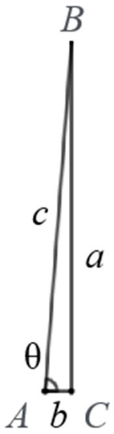
$a^2=c^2-b^2=c^2-(\frac{1}{2}c)^2=c^2-\frac{1}{4}c^2=\frac{3}{4}c^2$，$a=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ (長度不取負值)

$sin60°=\frac{a}{c}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$cos60°=\frac{b}{c}=\frac{\frac{1}{2}c}{c}=\frac{1}{2}$

$tan60°=\frac{a}{b}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}c}{\frac{1}{2}c}=\sqrt{3}$

6. 若 θ＝90°，如何得到 $sin90°$、$cos90°$？



我們可以想像θ越來越接近 90°時，b 會接近 0，a 會接近 c。

當 θ＝90°，b＝0，a＝c

$sin90° = \frac{a}{c} = \frac{c}{c} = 1$

$cos90° = \frac{b}{c} = \frac{0}{c} = 0$

7. 除了 *sin*、*cos*、*tan* 以外，還有 *csc*、*sec*、*cot*。

$$csc\,\theta = \frac{1}{sin\,\theta}$$

$$sec\,\theta = \frac{1}{cos\,\theta}$$

$$cot\,\theta = \frac{1}{tan\,\theta}$$

8. 重要角度的三角函數

角度單位除了度(°)以外，還有弧度

常用的角度與弧度對應如下

360°＝2π、180°＝π、90°＝$\frac{1}{2}\pi$、60°＝$\frac{1}{3}\pi$、45°＝$\frac{1}{4}\pi$、30°＝$\frac{1}{6}\pi$

θ(角度)	0°	30°	45°	60°	90°
θ(弧度)	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞ (無限大)

θ 介於 0°~90°時，我們可以看出以下幾點：

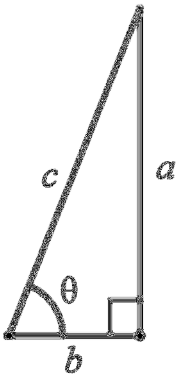
(1) θ 越大，$sin\theta$ 越大。

(2) θ 越大，$cos\theta$ 越小。

(3) θ 越大，$tan\theta$ 越大。

二、三角函數的應用

9. 下圖為直角三角形，若 $a=5$，$b=2$。求 $sin\theta$、$cos\theta$、$tan\theta$。



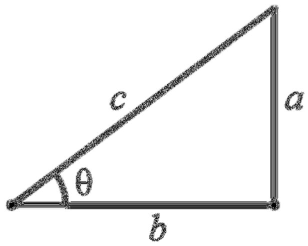
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{5^2+2^2}=\sqrt{25+4}=\sqrt{29}$$

$$sin\theta=\frac{a}{c}=\frac{5}{\sqrt{29}}$$

$$cos\theta=\frac{b}{c}=\frac{2}{\sqrt{29}}$$

$$tan\theta=\frac{a}{b}=\frac{5}{2}$$

10. 已知 $sin\theta = 0.6$，求 $cos\theta$ 和 $tan\theta$。



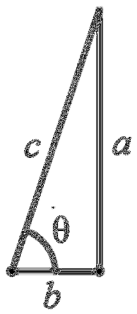
$sin\theta = \frac{a}{c} = 0.6$，$a = 0.6c$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{c^2 - (0.6c)^2} = \sqrt{c^2 - 0.36c^2} = \sqrt{0.64c^2} = 0.8c$$

$cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{0.8c}{c} = 0.8$

$tan\theta = \frac{a}{b} = \frac{0.6c}{0.8c} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

11. 已知 $tan\theta = 3$，求 $sin\theta$ 和 $cos\theta$。



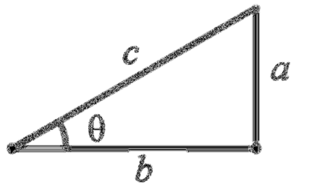
$tan\theta = \frac{a}{b} = 3$，$a = 3b$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(3b)^2 + b^2} = \sqrt{9b^2 + b^2} = \sqrt{10b^2} = \sqrt{10}b$$

$sin\theta = \frac{a}{c} = \frac{3b}{\sqrt{10}b} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$

$cos\theta = \frac{b}{c} = \frac{b}{\sqrt{10}b} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$

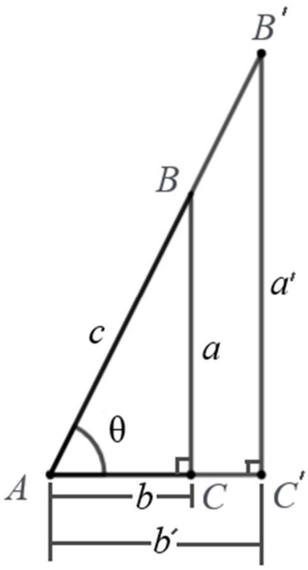
12. 已知 $sin\theta = 0.5$，$a = 3$ 求 b。



$sin\theta = \frac{a}{c} = 0.5$，$c = 2a$

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a = \sqrt{3} \times 3 = 3\sqrt{3}$$

13. 如下圖，△ABC 中，$tan\theta = 2$。從$\overline{AC}$延長線取一點 C\`，從$\overline{AB}$延長線取一點 $B$\`，且$\overline{AC} \perp \overline{AB}$，求$\frac{a}{b}$。



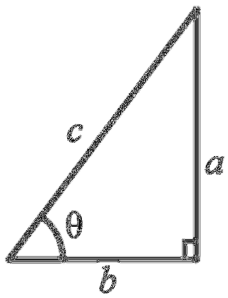
∵ $\angle BAC = \angle B\text{\`}AC\text{\`}$，$\angle ACB = \angle AC'B\text{\`}$

∴△ABC 與△$AB\text{\`}C\text{\`}$相似 (AA 相似)

$\frac{a}{b} = \frac{a\text{\`}}{b\text{\`}}$ (相似三角形對應邊成比例)

$\frac{a\text{\`}}{b\text{\`}} = \frac{a}{b} = tan\theta = 2$

14. 如下圖，$tan\theta=\frac{4}{3}$，求 $sin\theta$ 和 $cos\theta$。



$sin\theta=\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$，$a=\frac{4}{3}b$

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(\frac{4}{3}b)^2+b^2}=\sqrt{\frac{16}{9}b^2+b^2}=\sqrt{\frac{25}{9}b^2}=\frac{5}{3}b$$

$sin\theta=\frac{a}{c}=\frac{\frac{4}{3}b}{\frac{5}{3}b}=\frac{4}{5}$

$cos\theta=\frac{b}{c}=\frac{b}{\frac{5}{3}b}=\frac{3}{5}$